

FUNKCE ZADANÉ IMPLICITNĚ

Pokud někde nejsou uvedeny výsledky, tak můžete využít konzultací u přednášejícího nebo u vedoucího cvičení. Totéž v případě že výsledky uvedeny jsou, ale vy neumíte příklad vyřešit.

Příklad 1. Určete derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $xy - \ln y = a$ [$y' = \frac{y^2}{1-xy}$]

(b) $y^x = x^y$ [$y' = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}$]

Příklad 2. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $x = y - 4 \sin y$ [$\frac{1}{1-4 \cos y}, -\frac{4 \sin y}{(1-4 \cos y)^3}$]

(b) $x - \ln y - y^2 = 0$ [$\frac{y}{1+2y^2}, \frac{y+2y^3-4y^2}{(1+2y^2)^3}$]

(c) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{x} = 0$ [$\frac{x+y}{x-y}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$]

(d) $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$ [$-\frac{x}{y}, -\frac{x^2+y^2}{y^3}$]

(e) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ [$-\frac{y}{x}, \frac{2y}{x^2}$]

(f) $y^3 - 2xy + x^2 = 0$ [$\frac{2y-2x}{3y^2-2x}, \frac{4y'-2-6yy'^2}{3y^2-2x}$]

Příklad 3. Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^4 - xy + y^4 = 1$ je pro $x = 0$ a $y = 1$ rostoucí neb klesající a konvexní neb konkávní. Výsledek tohoto vašeho rozhodnutí sdělte neprodleně vedoucímu cvičení.

[Je rostoucí a konkávní]

Příklad 4. Vypočtete parciální derivace funkce $z = g(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4 = 0$ [$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-x}{z-xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-y}{z-xy}$]

(b) $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$ [$\frac{8x+y+1}{6z+y}, \frac{x+4y-z}{y+6z}$]

(c) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$ [$\frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}, \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$]

(d) $e^z + x^2y + z + 5 = 0$ [$-\frac{2xy}{e^z+1}, -\frac{x^2}{e^z+1}$]

Příklad 5. Určete tečnou rovinu v bodě A ke grafu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně následující rovnicí

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, -3]: [2x - 6y - 3z - 49 = 0]$

(b) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0, A = [1, -2, 4]: [x - 6y - 6z + 11 = 0]$

(c) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, A = [2, 2, 1]: [x + y - 4z = 0]$

Příklad 6. Funkce $y = f(x)$ je implicitně určena rovnicí $x^3 + y^3 - 6xy = 0$. Nalezněte takové x , aby $f'(x) = 0$: [$2 \cdot 2^{1/3}$]

Příklad 7. Určete lokální extrémů funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$: [maximum pro $x = 4^{1/3}$]

(b) $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$: [maximum pro $x = 1, x = -1$]

Příklad 8. Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ je pro $x = y = 1$ konvexní neb konkávní: [je konkávní]

Příklad 9. Určete rovnici tečny a normály v bodě A ke grafu funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $xy + \ln y - 1 = 0$, $A = [1, 1]$: $[x + 2y - 3 = 0, 2x - y - 1 = 0]$

(b) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, $A = [1, 2]$: $[14x - 13y + 12 = 0, 13x + 14y - 41 = 0]$

Příklad 10. Určete první a druhý diferenciál funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $[dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy, d^2z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2 - a^2}{z^3}dy^2]$

(b) $\ln z = x + y + z - 1$: $[dz = \frac{z}{1-z}(dx + dy), d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2)]$

Příklad 11. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $z^3 - 2xz + y = 0$ v bodě $[1, 1]$. Přitom funkční hodnota v tomto bodě je $z = 1$.
 $[T = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2]$

M. Doupovec